Undersøgning
om den Belidorske Regel,
angaaende
Ramme-Bukkens Virkning.

ved

C. G. Kratzenstein.

Da det nyelig er blevet mig tilladt, at forelegge mine Argumenter i Forsvar af Hr. Belidor til nøyere Undersøgning, saa vil jeg her kortelig igientage Statum quæstionis. Hr. Belidor har givet en algebraisk Formul til Rammebukkens Forhold imod hinanden, hvilken viser, at Pælens Gesvindighed, som den faaer ved Rammebukkens Fald, forholder sig forkeert, som Masserne af Pælen og Bukken tilsammentagne, men ikke, som nyelig blev foregiven, forkeert, som Pælens Masse allene. En vis Mathematicus negter Rigtigheden af dette forkeerte Forhold, og paastaaer, at det rette Forhold meget mere maa giælde, fordi naar Pælens Masse tiltager, saa tiltager og dens Tyngde, hvilken formedelst sin Trykning maa befordre Pælens Nedgang. For at bevise denne Slutning, beraaber han sig paa en Erfaring, at Pælen er bleven meget hastigere nedrammet, naar man ceteris paribus belæssede den med endeel Biælker, som formeerede dens Tyngde. Jeg tilstod, at denne Erfaring havde en sandsynlig Grund imod den Belidorske Regel, eftersom jeg selv endnu ikke nøye havde undersøgt Regelen. Men jeg befandt ved Undersøgningen, at denne Erfaring ikke angaaer den Belidorske Regel. Hr. Belidor har vist paa foranførte Sted ikke havt i Sinde at etablere nogen nye Regel for Nedramningen, det er meget meere den bekiendteste og nu omstunder af alle Mathematiker og Physiker antagne Collisions Lov for de bløde Legemer, hvilken siger, at det anstødte Legems Gesvindighed er saa stor, som Produktet af Massen i Gesvindigheden af det anstødende, divideret med Summen af begge Masserne. Nu vil vel denne Regel staae ved Magt, saa længe Verden staaer, og der maatte sandelig reise sig en heel Nation op derimod, dersom man allene vilde giøre den fordægtig,

fordægtig, hvilket endnu ikke er skeet. Jeg setter altsaa, at den ovenomtalte Erfaring haver sin fulde Rigtighed, saa lader det sig dog med største Tydelighed bevise, at ovenmeldte Massernes forkeerte Forhold bliver slet ikke derved giort urigtig. Massen og Tyngden ere i Mekaniken aldeles ikke ligegyldige Ting. Collisions Reglerne ere ikke grundede paa Begrebet om Tyngden, men paa Mængden af de materielle Deele. De ville altsaa staae ved Magt og giælde, om der var slet ingen Tyngde til. Men virker denne med, saa bliver den beregnet for sig. Nu vilde Belidor allene bestemme Pælens Gesvindighed efter det første Stød, for at sammenligne de forskiellige Rammebukkes og Pæles Virkninger imod hinanden, og derfor maatte han nødvendig beregne Gesvindigheden efter det forkeerte Forhold af Masserne. Skulle nu Tyngden alligevel virke med, saa kunde man kun sige, at dens Medberegning var forglemt, men derfor ikke, at ovenmeldte Forhold var falsk. Men jeg skal vise i følgende Beregninger, at Hr. Belidor har med rette udeladt Tyngden, eftersom den ved Massens Formeerelse mere hindrer end hielper, i det den formindsker Pælens Gesvindighed mere end dens Tyngde befordrer den, naar man allene undtager et besynderlig Fald, som herefter skal anføres.

Jeg maa endnu legge dette til Hr. Belidors Forsvar, at han selv har været tilstæde ved saadant mechanisk Arbeide, og altsaa ikke af andres Fortællinger allene har erlanget sin Kundskab derom. Han har selv efterseet alle berømte Franske Havne, Canaler, Broer o. s. v., har selv angivet Ingenieurerne Maskiner, og ladet dem sette i Verk under sin egen Opsigt.

Derneſt underſtaaer jeg mig og ved denne Leylighed at indlegge en Forbøn for min Favoritinde, Physiken. Af ovenmeldte supponerede Feyl, og nogle visse manglende Erfaringer, har man og sluttet til Physikens manglende Tilstand. Det er langt fra, at jeg vil fradømme min Favoritinde alle Ufuldkommenheder; saa blind er min Kierlighed ikke, men jeg holder mig dog forbunden at tage hendes Partie, naar der legges hende fremmede Mangler til Last. I forrige Tider bragte man neſten alt det ind i Physiken, som ellers egentlig henhører til Mathesin adplicatam, eftersom dens Deele endnu ikke paa den Tiid vare udviklede. En Physiker betragter egentlig kun de Egenskaber og Forandringer i et Legeme, som foraarsages ved Legemernes Sammensetning og Adskillelse. Som Mathematikus tillige maaler han dem og, for saavidt det hører til hans Kundskab. Men til at bestemme, hvor stor en Kraft maa være, som et faldende Leme bruger til at sønderbryde en ligestaaende Pæl, det hører visselig til Mechanikens Fag, eftersom en Physiker ikke behøver dens Anvendelse. Men i sig

 selv

selv feyler det ikke heller saa meget paa denne Kundskab, som man foregiver. Det af mig foreviiste Brev giver os allerede en saadan Kundskab. Det heder, man tør til en Hammer af 4000 Pund, som falder fra 14 Fods Høyde, ikke bruge nogen svagere end en Pæl af 12 Tomme i Qvadrat, hvis den ikke skal spalte eller brække, og at man deraf let kand giøre et Reglement for tyndere Pæle.

Endelig vil jeg sette, at en rigtigere Regels Mangel for Nedrammingen kunde med Rette legges Physiken til Last, saa vil jeg heller paatage mig at erstatte denne Mangel, end see paa, at den skal være besværet med slige Bebreydelser. Her er Opløsningen. Jeg bruger slet ingen nye Grunde eller Regler dertil, men haver allene anvendt de gamle Love, iblant hvilke ingen findes, som jo allerede staaer i mit liden Systema Physices. Det øvrige bestaaer i Kunstgrebene af de algebraiske Forvandlinger.

Beregning over Nedramningen.

Første Opgave.

Af en Rammehammers givne Masse eller Tyngde, dens Falds Høyde og Pælens Masse eller Tyngde og dens Tykkelse at finde Grundens Modstand og Pælens Nedgang for hvert Slag.

1.) Forberedelse. Eftersom Hammeren ved sit Fald udøver en levende Kraft paa Pælen, saa er Maalet paa Forholdet Produkten af Massen og Høyden $= MA$, dens erlangte Gesvindighed er som $\sqrt{A}$, eller for sig selv $= C = \sqrt{A.64}$. $= 8\sqrt{A}$, naar man bruger Engelsk Maal. Dette, endskiønt haarde eller elastiske Legems Stød paa Træet, retter sig efter de bløde Legemers Collisions Love (eftersom Træets Elasticitet falder bort imod saa stor en Masse, og det bliver virkelig knuset.) Altsaa er den erlangte Gesvindighed af Hammeren og Pælen tilsammen efter Stødet $= c = \frac{8\sqrt{A}.M}{M+m}$ eftersom den forrige Gesvindighed nu bliver fordeelet paa begge Masserne, og altsaa nødvendig maa være ringere. Setter man nu Produkten af Hammerens Masse og Høyde $AM = 1$, men forandrer Pælens Masse $= m$, og giør den f. Ex. to, tre eller fire gange større, saa

saa er $c = \frac{8}{1+m}$; $c' = \frac{8}{1+2m}$; $c'' = \frac{8}{1+3m}$; $c''' = \frac{8}{1+4m}$ &c. Nu forholder disse Brok $\frac{8}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{8}{5}$ sig, eftersom deres Tællere ere lige, forkeert, som deres Nævnere, altsaa forholder Gesvindigheden af den Pæl, som har dobbelt Masse, sig til dens af den enkelte Masse, som 2 til 3, det er forkeert som Summerne af begge Masser (ikke som de forkeerte Masser af Pælene allene.) Saavidt gaaer Hr. Belidors Beregning, som uden Tvivl vil altid beholde sin Rigtighed i Henseende til Pælens Gesvindigheds Beregning allene, uden at see paa Modstanden. Men da det endnu ikke herved bliver bestemmet, hvorledes Pælens Nedrammelse tager af, eftersom Modstanden bestandig tiltager, (hvilket Belidor ey heller har paataget sig at bestemme) saa haver jeg paa følgende Maade, og som jeg troer tilfulde, erstattet denne Mangel.

Naar en Metalkugle falder ned paa fugtig ælted Leer, saa indtrykker den deri en Hule af en vis Størrelse, som altid forholder sig som MA. Dette er allene en frie Virkning af dens Fald eller Gesvindighed. Saa længe Kuglen ikke synker dybere, end til sin halve Diameter, er Faldet endnu ey forbunden med nogen merkelig Friction, og den kand overalt ikke blive merkelig, eftersom den slidende Flade derefter altid bliver den samme. Naar jeg altsaa veed, hvor stor den Hule er, som enhver Kugle foraarsager ved et Fald fra en given Høyde, saa kand man temmelig nøye bestemme Hastigheden, som den faaer, naar den bliver skudt udaf et Gevehr af Skuds Hulens Dybhed. Disse Huler forholder sig nemlig, som Qvadraterne af deres Gesvindigheder, eller som de Høyder, af hvilke disse Gesvindigheder i Faldet foraarsages.

Naar man nu forestiller sig, at man lod den Pæl, som skal nedrammes, selv falde ned fra en vis Høyde, og maalede Hullets Størrelse, som den ved sit Fald vilde giøre i Jorden, saa kunde man finde Pælens Nedsynkelse for enhver anden Gesvindighed, som Hammeren giver den, dersom Frictionen paa Pælens Flade ikke kom dertil. Størrelsen af denne Friction, som retter sig efter den slidende Flade, som bestandig tager til, og efter Jordarten, maa altsaa først fradrages fra den Kraft, som Pælen haver faaet, forend man kand bestemme dens Nedsynkelse. Nu synes det vel at være en vanskelig Sag, at bestemme Frictionen for hver Indsynkning, da man endnu ikke veed, hvor stor denne Nedsynkning selv bliver formedelst Frictionen. Imidlertid forhielper os undertiden de algebraiske Forvandlinger til en saadan Adskillelse af disse forviklede Ting, og jeg fandt med megen Fornøyelse, at det lod sig ogsaa giøre i dette Fald.

Fald. Man bestemmer altsaa, af ovengivne Pælens og Hammerens Gesvindigheder, den Høyde fra hvilken den havde ved et Fald bekommet den samme Gesvindighed, nemlig $a = \frac{64AMM}{MM+2Mm+mm}$. Altsaa er Pælens Kraft v og Hullets Størrelse λ, hvis ingen Friction forekom, som $a.\overline{M+m}$. Følgelig er Hullets Størrelse saa stor, som Pælens Kraft mindre end Frictionen, eller $\lambda = v - f$. Men da dette f er en foranderlig Størrelse, som voxer med Dybheden t, saa udtrykker jeg den ved Dybden selv, naar jeg multiplicerer den med Pælens Peripherie $= \pi$ og Jordens Cohæsion eller Pression $= p$. Heraf reiser sig nu denne Æquation; $\lambda = v - \pi tp$ Hvorudi Frictionen giælder for den Deel af Pælen, som allerede er nedrammet; Derimod maa kun den halve gnidende Overflade regnes for den Deel af Pælen, som endnu skal nedrammes, følgelig er $\lambda = v - \frac{\pi t.p}{2}$. Er nu allerede en Deel af Pælen i Jorden, og man vil vide Dybheden af det nye Hul for det følgende Slag, saa maa man fradrage begge Frictionerne fra v, saa er $\lambda = v - \pi tp - \frac{\pi\tau p}{2}$, hvor τ betyder det nye Huls Dybhed. Men af dette Forhold lader Nedramningen sig endnu ikke udvikle, eftersom Hullets Størrelse endnu stedse confunderes med dets Flade. For altsaa tillige at ophæve dette, saa udtrykker jeg Hulens Størrelse ved πt og τ. nemlig ved firkantede Pæle er basis $= \frac{\pi^2}{16}$ og altsaa Hullets Størrelse $\frac{\pi\pi t}{16}$. Naar man nu setter dette Maal i steden for λ, saa kand man udvikle alle enkelte Deele i Forholdet; nemlig for det første Slag er $\frac{\pi\pi t}{16} = v - \frac{\pi tp}{2}$, altsaa

$$\pi\pi t = 16v - 8\pi tp \text{ og } \pi\pi t + 8\pi tp = 16v \text{ følgelig } t = \frac{16v}{\pi\pi + 8p\pi} = \frac{2v}{\frac{\pi\pi}{8} + \pi p} \quad \text{Q.E.P.}$$

For det andet og de følgende Slag betyder t alletider den Dybhed, til hvilken Pælen allerede er kommen, og τ den nye Nedramning ved det følgende Slag, altsaa

$$\frac{\pi\pi\tau}{16} = v - \pi tp - \frac{\pi\tau p}{2}$$

$$\pi\pi\tau = 16v - 16\pi tp - 8\pi\tau p$$

$$\pi\pi\tau + 8\pi\tau p = 16v - 16\pi tp$$

$$\frac{\pi\pi\tau}{8} + \pi\tau p = 2v - 2\pi tp$$

$$\frac{\pi\pi}{8} + \pi p = \frac{2v - 2\pi tp}{\tau}$$

$$\tau = \frac{2v - 2\pi tp}{\frac{\pi\pi}{8} + \pi p} \quad \text{pro formula 2da.}$$

Substituerer man nu altid den udkomne Pælens Dybhed i steden for t, saa bekommer man den Progression, hvorefter Nedramningen gaaer fort. Men endnu fattes det, at vide Pælens bestemte Kraft, eller Hullets Størrelse, som den uden Friction kand giøre i den forekommende Jordart. Var dette en blød og jævn Jord, saa kunde man faae v at lade en Kugle falde i den samme. Men det beste er, at søge denne Kraft af Nedramningen efter det første eller andet Slag.

Anden Opgave.

Af Pælens Nedramning for første og andet Slag, at finde Pælens bestemte Kraft og Jordartens Friction.

Her er Differencen af begge Nedramninger $d = \tau - t = \dfrac{2\pi tp}{\frac{\pi\pi}{8} + \pi p}$

Altsaa

$$\frac{d\pi\pi}{8} + d\pi p = 2\pi tp \;\Big|\Big|\; \frac{d\pi\pi}{8} = 2\pi tp - d\pi p \;\Big|\Big|$$

$$\frac{d\pi\pi}{8p} = 2\pi t - d\pi \;\Big|\Big|\; \frac{d\pi}{8p} = 2t - d \;\Big|\Big|$$

$$\frac{d\pi}{8.(2t-d)} = p = \text{pressioni terræ.}$$

Ved Hielp af p finder man v af de første Equationer

$$\pi\pi t = 16v - 8\pi tp \;\|\; \frac{\pi\pi t + 8\pi tp}{16} = v$$

Tredie Opgave.

Af Rammens, Pælens og Jordartens givne Omstændigheder, det er af v, p, π at finde den største Dybhed, til hvilken en Pæl ved Hielp af en Ramme kand nedbukkes.

Opløsning.

Naar t skal være et Maximum, saa maa dets Tilvæxt være $\tau = 0$, og følgelig efter den anden Hovedformul $2v = 2\pi tp \;\|\; v = \pi tp$

Følgelig $t = \frac{v}{p\pi}$ og $\frac{v}{p} = \pi t$.

Af den sidste Formul er det klart, at hverken Frictionen eller Pælens Kraft allene, men begges Forhold imod hinanden bestemme Pælens største Dybhed. Nemlig den største Dybhed forholder sig til Pælens Kraft (naar man setter $\pi = 1$ ved een og den samme Pæl) som 1 til Frictionen.

Fierde Opgave.

Naar en given Pæl ikke kand drives dybere med den forrige Ramme; at finde Dimensionen paa en nye Ramme, som kand drive Pælen til den forlangte Dybhed.

Oplosning.

I dette Fald blive m, π og p uforandrede, t bliver givet, et nyt v maa søges, og deraf et nyt AM bestemmes. Efter det sidste Forhold var $v = \pi pt$, ligeledes var efter ovenstaaende $v = a.\overline{M+m}$ altsaa $a\,M+m = \pi pt. = aM + am$ $= \left(\frac{M\sqrt{A}}{M+m}\right)^2.\,M+m$ eller $\sqrt{a} = \frac{M\sqrt{A}}{M+m}$ heraf kommer $M = \frac{m\sqrt{a}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}}$ følgelig

$$\pi pt = v = a\left(\frac{m\sqrt{a}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}} + m\right). \;\|\; a = \frac{v}{M+m} \;\|\; \frac{\sqrt{v}.\,\overline{M+m}}{M.\sqrt{\overline{M+m}}} = \sqrt{A} = \frac{\sqrt{v}\sqrt{\overline{M+m}}}{M.}$$

altsaa $A = \frac{v.\,\overline{M+m}}{MM}$

Altsaa

Altsaa kand man opløse Problemet, naar man enten antager Rammebukkens Massen at være given, og deraf beregner Høyden, hvorfra den maa falde; eller man antager Høyden, som given, og deraf beregner Bukkens Masse.

Femte Opgave.

At udregne hvormeget Pælens og Bukkens Vægt tilsammen kand ved Trykningen befordre Pælens Nedramning.

Opløsning.

Da man slet ikke kand slutte fra Vægten allene, in Abstracto betragtet, til Nedramningens Størrelse, saa maa man forfare dermed efter ovenmeldte Maade, nemlig, man maa bemerke, hvor stor den Hule er, som Pælen med sin Spidse af egen Tyngde gior i en given Jordart. Mængden af den bortdrevne Jord kand man her antage som Maalet paa Tyngdens Virkning og addere det som en Coefficient til Pælens Kraft af Slaget. Lad Hulens Størrelse være h, saa bliver ovenstaaende Forhold forvandlet til denne

$$\frac{\pi\pi t}{16} = v + h - \frac{\pi t p}{2}$$

Til en Prøve har jeg antaget, at en 12 Tomme Pæl ved sin Tyngde allene kand giore et Hul omtrent paa 8 til 9 Cubictomme med sin Spidse i en middelmaadig fast Jordart (hvilket er allerede temmelig høyt sat). Antager man nu saadanne Størrelser for v og p, at Pælen af første Slag gaaer en Fod dybt, saa vilde dertil endnu komme et Tillæg af $\frac{1}{200}$ Fod formedelst Tyngden, det er endnu ikke et Straahalms Brede, og efter en 5 til 6 Fods Dybhed vilde dette Tillæg formedelst den store Friction ikke mere blive merkelig. Man kand altsaa gierne undvære den i Regningen; thi en liden forekommende Steen kand foraarsage, at man kommer til at anstille en langt større Subtraction, end alle disse smaa Tillæg af Tyngden tilsammentagne kand udgiøre, og man kunde da forekaste mig, at jeg afsiede Myg og nedslugede Elephanter. Det samme gielder og, naar man vilde bringe Jordlavenes ved Pælens Nedramning tiltagende Fastighed med i Regningen, og derefter formeere vores p i en vis Progression. Eftersom Jordlavene forandrer sig, som oftest, paa hver Fod eller Alen, og den ene Jordart er altid mere compressible end den anden, saa vilde al theoretiske Bestemmelse derover være en blot Speculation, uden ringeste practiske Nytte. Det vilde være langt sikrere, dersom en Entrepreneur, der forud maa vide Tiden og Depenserne, som gaae til en vis Indpæling, lod een eller

 flere

flere Pæle slaae ned paa Stedet til en Prøve, eller, hvilket var endnu mageligere, lod Jordlavene sondere med en Grundborer paa forskiellige Steder, og giorde sit Overslag derover efter sin gamle Erfaring. Jeg legger endnu dette til, at man kand temmelig nøye examinere Stryget og Gangene af Jordlavene nær ved Brædden af Søen, hvorudi Indpælingen skal foretages, eftersom Lavene pleye at gaae skraa ned fra det faste Land i Grunden af Søen, ligesom fra et Bierg ned i dets Dal.

Det fornemste, hvortil man kand bruge mit ovenstaaende Arbeide, er at udvælge de beste Omstændigheder ved en Ramme. Om det f. Ex. er bedre at lade en tyngere Hammer M falde paa Pælen fra en mindre Høyde A, eller en lettere Hammer μ fra en større Høyde α. Endskiønt dette er meget ligegyldigt i Henseende til Hammerens Kraft allene, naar kuns $MA = \mu\alpha$, saa giør dog Pælens Iberegning en merkelig Forandring i denne Liighed. Jeg vil sette dette Fald. Det er Spørsmaal, om det er bedre at lade en Hammer paa 1000 Pund falde fra 4 Fods Høyde, eller en Hammer paa 250 Pund fra 16 Fods Høyde. Kraften af enhver Hammer for sig er af 4000 Grader, men saasnart en Pæl af 1000 Pund bliver stødt af dem, saa forholder den Kraft, som den bliver meddeelt af den tyngere Hammer, sig til den, som den faaer af den lettere som 3 til 2. Hvilken Forskiel er ey at foragte i Praxi.

Skulde for det øvrige nogen Mechanikus have fundet sin Fordeel ved at besvære Pælen med andre Biælker, naar Indpælingen skulde skee i visse Jordarter, saa har dette en gandske anden Aarsag end at formeere den Geschwindighed, som Pælen faaer ved Slaget, ved den formeerede Tyngde. Det skeer meget meere af en anden Aarsag, som ikke er dem ubekiendt, der omgaaes med sligt Arbeide, hvilken maa søges i Naturen af en Art Flyvesand, som undertiden forekommer i en vis Dybhed. Denne Sand viser den besynderlige Egenskab, at den formedelst sin store Bevægelighed og paaliggende store Last driver Pælen merkelig tilbage, naar den bliver nedrammet. Dette Tilbagespring er det, som maa søges, saa meget mueligt er, ved den paalagde Last at forhindres. Jagttagelsen selv er ellers saa lidet ny, at jo allerede Leupold haver bekiendtgiort samme i sin Theatro Machinarum.

Vær-